Examen de Géométrie – Janvier 2016

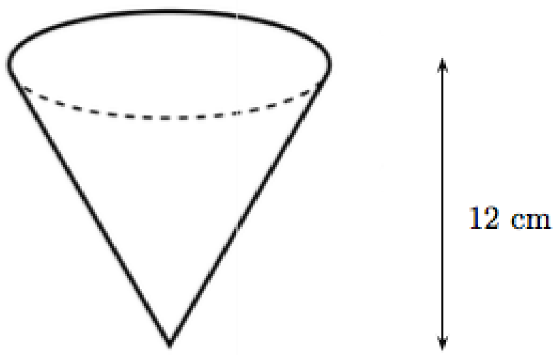
Question 1 – On considère le triangle ABC de côtés a, b et c.

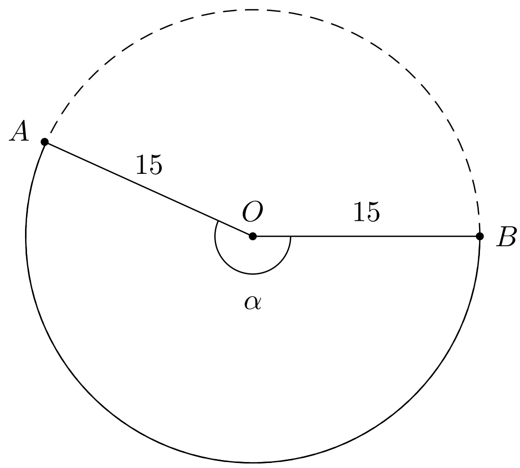
1. Définissez le *cercle circonscrit* à ce triangle.
2. Démontrez que la surface de ce triangle est donnée par

$$S = \frac{abc}{4R}$$

où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle.

Question 2 – On voudrait fabriquer un cône en papier pour mettre des bonbons. Pour cela, on découpe un secteur dans un disque de rayon 15 cm et on colle OA à OB. Déterminez l'angle α pour avoir un cône de 12 cm de profondeur.





Question 3 – On considère les deux cercles

$$C_1 \,:\, x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0,$$

$$C_2 \,:\, x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0.$$

(a) Donnez le centre et le rayon de C_1.

(b) Donnez le centre et le rayon de C_2.

(c) Déterminez l'équation de la droite AB où A et B sont les points d'intersection des cercles C_1 et C_2.

(d) Montrez que la droite reliant les deux centres est perpendiculaire à la droite AB.

Question 4 – On considère le plan $\Pi \,:\, x + y + 2z = 3$ et les droites

$$\Delta_1 \,:\, \begin{cases} 5x + 3y + 15 = 0 \\ y + 5z - 20 = 0 \end{cases} \qquad \Delta_2 \,:\, \begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = k \\ z = 5 - 2k \end{cases} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

(a) Donnez un vecteur normal au plan Π.

(b) Donnez un vecteur directeur et un point de la droite Δ_1.

(c) Donnez un vecteur directeur et un point de la droite Δ_2.

(d) Déterminez si les droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles ou sécantes avec le plan Π.
Si la droite est parallèle au plan, précisez la distance entre la droite et le plan.
Si la droite et le plan sont sécants, donnez leur point d'intersection.

Question 5

(1) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Répondez par V ou F dans la case à la fin de la phrase, *sans justifier*. Une mauvaise réponse entraînera l'annulation d'une bonne réponse. Vous pouvez vous abstenir sans être pénalisé.

(a) En topologie, une paire de ciseaux est une surface de genre 2.	
(b) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a toujours $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.	
(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin x = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.	
(d) Le point $P = (2, -2\sqrt{3})$ est à distance 4 de l'origine.	
(e) Le point $M = (1, 4, 1)$ est le milieu du segment AB, où $A = (2, -2, 0)$ et $B = (4, 6, 2)$.	

(2) Ecrivez la réponse correcte dans la case à la fin de la phrase *sans justifier*.

(a) Soit $A = (-1, 1)$, $B = (2, 1)$ et $C = (-2, 3)$. Déterminez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$.	
(b) Que deviennent les coordonnées du point $P = (5, 0, -3)$ quand on translate l'origine du repère vers le point $(-3, 2, -4)$?	
(c) Déterminez $m \in \mathbb{R}$ pour que les vecteurs $\vec{u} = (m, 0, -8)$ et $\vec{v} = (-1, 3, -5)$ soient orthogonaux.	
(d) Donnez l'équation du plan médiateur du segment AB où $A = (2, -2, 0)$ et $B = (4, 6, 2)$.	
(e) Si $\vec{u} = (-1, -3, -2)$ et $\vec{v} = (2, 2, -4)$, calculez $\vec{u} \times \vec{v}$.	