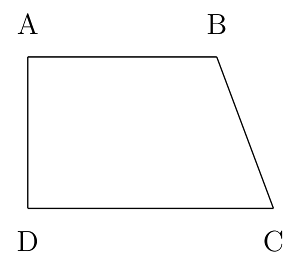
Examen de Géométrie – Mai 2017

Question 1

(1) Enoncez et démontrez le Théorème des médianes.

(2) On considère le trapèze rectangle $ABCD$ ci-dessous avec $|AB| = 5$ cm, $|AD| = 4$ cm et $\widehat{DCB} = 60°$. Déterminez les valeurs exactes du périmètre et de l'aire de ce trapèze.



Question 2

(1) On considère les deux plans $\Pi_1 : x - 2y + 3z + 1 = 0$ et $\Pi_2 : kx + y - 5z - 3 = 0$.

(a) Déterminez $k \in \mathbb{R}$ pour que Π_1 et Π_2 soient orthogonaux.

(b) Pour cette valeur de k, déterminez l'intersection des plans Π_1 et Π_2. De quelle forme géométrique s'agit-il ?

(2) Soit $P = (1, 2, 5)$ et $Q = (3, -4, 1)$.

(a) Donnez l'équation cartésienne de la droite Δ joignant P à Q.

(b) Donnez l'équation du plan médiateur du segment PQ.

(c) Le point $R = (-1, 8, -12)$ appartient-il à la droite Δ ? et au plan médiateur ? Justifiez.

Question 3

(1) Résolvez l'équation $4 \sin^2 x = -\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x$, $x \in [0, \pi]$.

(2) Le nombre d'or.

(a) Donnez la valeur du nombre d'or.

(b) Donnez une équation du second degré dont le nombre d'or est solution. Justifiez.

(c) Construisez précisément à la règle et au compas un segment dont la longueur est le nombre d'or. Expliquez votre construction.

Question 4

(1) Soit $P = (-4, 0)$ et $Q = (4, 0)$. Démontrez que tout triangle PQR inscrit dans le demi-cercle de base $\overrightarrow{PQ}$ est rectangle.

(2) Un rayon lumineux est issu du point $M = (2, 3)$ sous un angle α avec l'axe OX. On sait que $\mathrm{tg}\, \alpha = 4$. Ayant atteint l'axe horizontal, le rayon est réfléchi (avec un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence). Donnez les équations des droites qui portent les rayons incident et réfléchis.

Question 5

(1) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Répondez par V ou F dans la case à la fin de la phrase, *sans justifier*. Une mauvaise réponse entraînera l'annulation d'une bonne réponse. Vous pouvez vous abstenir sans être pénalisé.

(a) Dans un triangle, la longueur du segment qui joint le milieu de deux côtés vaut la moitié de la longueur du troisième côté.	
(b) Dans tout polyèdre convexe, on a $S + A - F = 2$ où S, A et F représentent le nombre de sommets, arêtes et faces.	
(c) Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection de ses trois médiatrices.	
(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$.	
(e) Si on permute deux axes d'un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$ alors son orientation change.	

(2) Ecrivez la réponse correcte dans la case à la fin de la phrase *sans justifier*.

(a) Si θ est un angle du second quadrant dont le sinus vaut $\frac{3}{4}$, quelle est la valeur de $\operatorname{tg} \theta$?	
(b) Soit $\vec{a} = (2, -3, 1)$ et $\vec{b} = (-5, 2, 3)$. Calculez $\vec{a} \times \vec{b}$.	
(c) Donnez l'équation de la sphère centrée au point $C = (-3, 2, 5)$ et passant par l'origine $(0, 0, 0)$.	
(d) Soit $A = (1, 2, 3)$ et $B = (3, 2, 2)$. Donnez la longueur du segment joignant A et B.	
(e) Calculez le volume du parallélipipède construit sur les vecteurs $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (-5, 2, 3)$ et $\vec{c} = (1, 2, 3)$ (où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment la base du parallélipipède).	